Exercice 3 **5 points**

1. On a $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Donc les primitives de f sont de la forme $F(x) = x\mathrm{e}^x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc $F(x) = 1 + x\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.

Réponse a.

2. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2).

On a $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{1}$, donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Supposons qu'elle soient sécantes en un point A. Alors les coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ de A vérifient les deux représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& 2+r\\ b &=& 1+r\\ c &=& -r\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1-s\\ b &=& -1+s\\ c &=& 2-s\end{array}\right. .$$

On a donc $-r = 2-s \iff r = s-2$ et $2+r = 1-s \iff 2+s-2 = 1-s \iff 2s = 1 \iff s = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $b = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $a = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $c = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Les deux droites sont sécantes en $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Réponse a.

3. Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n} \cdot \vec{u} = 2\times 1 - 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. Donc (P) et (Δ) sont parallèles.

S'il existe un point commun à (P) et (Δ), alors (Δ) est incluse dans (P).

(Δ) passe par le point de coordonnées $(2\ ;\ 4\ ;\ 1)$. Or $2\times 2-4+1-1=0$, donc ce point est un point du plan (P). La droite (Δ) est donc incluse dans le plan (P).

Réponse b.

4. Un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-2}{1}$, donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont donc pas parallèles. Ils sont donc sécants.
De plus $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times 2-2\times 1+1\times 1=1$, donc les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas orthogonaux. Les plans ne sont donc pas perpendiculaires.

Réponse c.

5. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}},\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right)\iff\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right\|}$

On a : $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix}-2-1\\2-2\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=1\times(-3)+2\times 0+2\times 4=5$

$\left\|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\left\|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Donc : $\cos\alpha=\dfrac{5}{3\times 5}=\dfrac{1}{3}$, soit $\alpha\approx 71^\circ$ d'après la calculatrice. **Réponse d.**